LETTERA DEL SIGNOR ABATE JACOPO BONFADINI AL SIGNOR FRANCESCO...

Jacopo Bonfadini

LETTERA

DEL SIGNOR ABATE

JACOPO BONFADINI

AL SIGNOR

FRANCESCO AMALTEO

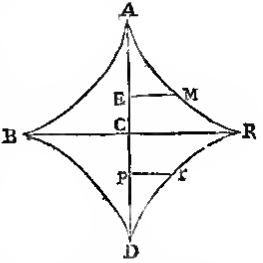
INTORNO UNA CURVA MANEGGIATA
DA CELEBRI MATEMATICI.

ORNATISSIMO AMICO.

Nel bellissimo Elogio del Sig. Marchese Landi tributato alla memoria dell'immortale Mascheroni, ed inserito nel X. Vol. della Società Italiana vi si legge, che il valente Sig. Gratognini riputato Professore di Pavia diede alla luce alcune sue osservazioni sopra la risoluzione Mascheroniana del paradosso dal Sig. d'Alembert proposto per la prima volta nelle Memorie dell'Accademia di Berlino, e poscia nel IV. Vol. dei suoi Opuscoli Matematici. La maniera, con la quale si esprime il bravo, ed eloquente Panegirista fa conoscere, che il Sig. Gratognini ha decifrato tutto l'arcano della misteriosa formola Alembertiana, ed ha altresì rettificato il ragionamento del Sig. Mascheroni, che ritrovasi nelle sue Annotazioniani al calcolo integrale del Sig. Eulero. Ella sa bene, Ornatissimo mio Amico, qual passione io m'abbia per questa sorta di studj, onde non maravigliarsi, se io mi sia dato ogni pensiero per ritrovare quest'operetta, ma sempre inutilmente. Questo infortunio mi ha forse trascinato in un'altro maggiore. Non potendo istruirmi leggendo le

altrui meditazioni, ho cercato di farlo da me stesso. Ma chi mi assicura, ch'io mi sia appigliato alla verità, o piuttosto non sia caduto in errore? Quest'è la precipua ragione, per cui penso di sommettere al di Lei purgatissimo giudizio i pochi risultati delle mie meditazioni sull'argomento in quistione. Buon conoscitore com'Ella è delle verità matematiche saprà o confortarmi nella mia maniera di vedere, o svelarmi i miei errori.

Ecco il paradosso proposto dal sig. d'Alembert: „ sia „ PM = y, AP „ = x, dy = dx. „ $\sqrt{(1-x)^{\frac{2}{3}}-1}$; „ AC = 1; l'elemento dell'arco „ AM sarà dx. „ $\sqrt{(1-x)^{-\frac{2}{3}}}$, „ quindi il suo „ integrale $\int dx$. „ $(1-x)^{\cdot\frac{1}{3}}$, ossia $\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot(1-x)^{\frac{2}{3}}$, oppure, „ fatto $1-x=z=CP$, $\frac{3}{3}\cdot\left(1\cdot(CP)^{\frac{2}{3}}\right)$. Se CP „ = o, si ha ARr = $\frac{3}{3}$; se CP è negativo, si „ ha l'arco AR = $\frac{3}{3}\cdot\left(1-(-CP)^{\frac{2}{3}}\right)$, val a „ dire = $\frac{3}{3}\left(1-CP^{\frac{2}{3}}\right)$ a ragione di $(-CP)^{\frac{2}{3}}$ „ = $CP^{\frac{2}{3}}$; la qual cosa non può essere, mentre



„ ARr

„ A R r è certamente maggior di A M nella sup-
„ posizione di C p = C P „

Incomincio dal prefiggermi la soluzione del seguente Problema: determinare l'andamento della curva rappresentata dall' equazione differenziale $dy = dx \cdot \sqrt{(1-x)^{-\frac{2}{3}}-1}$. Sia R il raggio osculatore della curva, nella quale le ordinate vengono riferite ad assi ortogonali. E' noto che nella supposizione di dx costante si ha $R = \frac{-ds^3}{dx\,ddy}$. Abbiamo veduto nel riferito §. del Sig. d' Alembert, che $ds = dx \cdot (1-x)^{-\frac{1}{3}}$, perciò si avrà $ds^3 = dx^3 \cdot (1-x)^{-1}$. Se si differenzia nuovamente il valore di dy nella supposizione di dx costante, si ottiene dopo le dovute riduzioni $ddy = \frac{dx^2}{3\cdot\left(1-(1-x)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{4}{3}}}$. Posti questi valori nella formola del raggio osculatore, si avrà in ultima analisi $R = -3\cdot\left(1-(-x)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot(1x)^{\frac{2}{3}}$.

Ella sa bene che per determinare i punti di flesso, e di regresso esistenti in una curva, quando si voglia far uso del raggio osculatore bisogna prima supporlo uguale all'infinito, od uguale a zero, secondo che le particolari circostanze del problema lo richiedono; poscia da tal supposizione si deducono quelle equazioni che vengono sommministrate dalli relativi fattori. Riuscendo inutile nel

caso nostro la supposizione di R infinito, bisogna appigliarsi all'altra di $R = o$. Si avrà quindi $o = -3.\left(1-(1-x)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}.(1-x)^{\frac{3}{2}}$, da cui si deduce $(1-x)^{\frac{3}{2}} = o$, ed $\left(1-(1-x)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} = o$. Dalla prima di quese due equazioni si ottiene $x = 1$. e dalla seconda $x = o$, ed $x = 2$. Esaminiamo ora i punti della curva corrispondenti alle supposizioni di $x = 1 - x = o$, ed $x = 2$. Per far questo suppongasi che il valore di x siasi accresciuto, o diminuito della quantità infinitesima dinotata dalla lettera m, onde pel primo abbiasi $x = 1 \pm m$. Si ponga questo valore nell'espressione di R, e si avrà $R = -3.\left(1-(1-1\mp m)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}(1-1\pm m)^{\frac{3}{2}}$ Dalla sola ispezione di tal quantità risulta che il valore di R diventa positivo, o negativo a norma che varia il segno prefisso ad m., quindi il punto della curva corrispondente all'assissa $x = 1$ deve essere un punto di flesso, o di regresto. Per riconoscere quale dei due abbia luogo in effetto, prendasi la formola $g = \frac{-d\,x\,d\,d\,y}{d\,s^3}$ appartenente all'angolo di curvatura, ed in essa pongansi i valori di $d\,s^3$, $d\,d\,y$ testè ritrovati. Si avrà dopo le necessarie riduzioni $g = \frac{-d\,x}{3\left(1-(1-x)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{3}{4}}}$. Se in quest'equazione in vece di x si mette $1 \pm m$, ottiensi $g = \frac{-d\,x}{3\left(1-(1-1\mp m)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}(1-1\mp m)^{\frac{3}{4}}}$;

da

da questo ultimo risultato veniamo a conoscere che il punto della curva in questione dev'essere di regresso, mentre l'espressione dell'angolo di curvatura riesce sempre negativa, qualunque siasi il segno prefisso alla lettera m. Dal già detto agevolmente si concepisce che un simil punto deve pure ritrovarsi dalla parte delle y negative. La curva adunque ha due punti di regresso corrispondenti all'assissa $x = 1$, val a dire uno dalla parte delle y positive, e l'altro delle y negative.

Sarebbe un'abusare della di lei pacienza, o Signore, s'io le volessi porre sott'occhi l'operazioni algebriche tendenti a dimostrare, che i due altri punti della curva corrispondente alle supposizioni di $x = 0$, e di $x = 2$ sono pur essi due punti di regresso. Basta averle indicato il metodo tenuto pel primo caso, affinchè possa ella farne l'applicazione agli altri due.

Da tutta questa analisi risulta: 1.° Che la curva è continua, e della natura dell'ovali; 2.° Che rivolge costantemente la sua parte convessa all'asse dell'assisse, come lo dinota la formola del raggio osculatore sempre affetta del segno negativo; 3.° ch'essa ha quattro punti di regresso, il primo dei quali corrispondente ad $x = 0$, il secondo, ed il quarto ad $x = 1$, e finalmente il terzo ad $x = 2$. Resta dunque a mio credere invincibilmente dimostrato che l'andamento della curva è

ben lungi dall'esser quello, che viene proposto dal Sig. Mascheroni nelle citate annotazioni; e ch'anzi egli non può essere diverso da quello, che ci viene rappresentato dalla figura, che abbiamo sott'occhj.

Per farle conoscere tutto questo avrei potuto far a meno di servirmi della Teoria dei punti di flesso, e di regresso, dandole sul bel principio l'equazione fiolta, che agevolmente si deduce dall'integrazione della proposta differenziale. Ma invece ho amato meglio di procedere nella forma, ch'ella ha veduto, onde farle conoscere qual via creda migliore da tenersi, ogni qual volta si si prefigge di sciogliere simili problemi, e specialmente allora quando si si ritrova mancante della finita espressione della curva, a cui si riferiscono.

Faciasi ora quello, che non si è fatto prima. Dall'equazione $dy = dx\sqrt{(1-x)^{\frac{2}{3}}-1}$ si deduce l'altra $dy = dx.\sqrt{\frac{1-(1-x)^{\frac{2}{3}}}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}} = \frac{dx.}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}\sqrt{1-(1-x)^{\frac{2}{3}}}$, ossia $dy = dx.(1-x)^{-\frac{1}{3}}.\sqrt{1-(1-x)^{\frac{2}{3}}}$, in cui la variabile finita fuori del segno radicale ha l'esponente minore dell'unità dell'esponente di quella, che n'è compresa; e perciò coi metodi ordinarj algebraicamente integrabile: diffatti essa somministra l'equazione $y =$

$(1-$

$\left(1-(1-x)\frac{3}{2}\right)\frac{1}{3}$; non vi si aggiunge la costante, mentre le due variabili, y, x si annullano nel tempo stesso.

Assicurata vieppiù in questa maniera l'indole della curva, ecco quello ch'io penso circa il paradosso rimarcato dal Sig. d'Alembert. Egli integra la formola $dx.(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ dell'elemento dell'arco, poscia suppone $1-x=\pm z$, ed ha per qualunque caso di x maggiore, o minore dell'unità, l'espressione finita $s=\frac{2}{3}-z\frac{2}{3}$, ciò che veramente è un assurdo. Ma non le sembra egli che la sostituzione di $\pm z$ invece di $1-x$ sia incompleta, ed affatto innopportuna, avuto riflesso al momento, in cui si verifica? Non le pare che si dovrebbe piuttosto far simile sostituzione prima di passare alla integrazione della formola proposta? Diffatti se ciò si facesse, in vece di $ds=dx.(1-x)^{-\frac{1}{2}}$, si avrebbe $ds=\mp dx.(\pm z)^{-\frac{1}{2}}$, e quindi $s=\mp z.(\mp z)^{\frac{1}{2}}+$ costante$=\mp z^{\frac{3}{2}}+$ costante. Per determinare la costante osservo, che quando x è minore dell'unità si deve far uso del segno superiore, che quando $s=0$, è pur $x=0$, quindi $z=1$, e perciò costante$=\frac{2}{3}$. L'integrale completo della proposta formola dovrebbe essere adunque $\frac{2}{3}.(1\mp z\frac{2}{3})$: con questo si soddisfa pienamente a tutte le condizioni del problema, quando per altro si faccia un retto uso del segno $\mp$ prefisso alla quantità variabile.

L'analisi di cui si serve il Sig. Mascheroni lo con-

conduce al medesimo risultato, ma il principio, da cui parte è ben diverso di quello, ch' io ho assunto. Egli prefigge il segno ± all' espressione dell' elemento dell' arco $dx . (1-x) \cdot \frac{1}{2}$ a cagione della seconda radice estratta, indipendentemente dal valore di x maggiore, o minore dell' unità, mentre a me sembra che abbisogni procedere affatto diversamente. Io non ardisco, o Signore, di risolutamente affermare, che stia il vero dalla mia parte. In perquisizioni di simil natura non havvi cosa più facile di quella di lasciarsi sedurre dall' apparenza del vero.

Prima di por fine a questa mia lettera mi permetta di richiamare la sua attenzione sopra la ritrovata equazione finita, e non le sarà difficile di riconoscerla appartenente ad una curva di cui trattasi a lungo nelle istituzioni Analitiche del P. Vincenzo Riccati, e del canonico professor Sabadini. Si può dire con ragione che quell' Opera è un magazzino delle più interessanti perquisizioni matematiche. A buon conto parlando della nostra curva ne fanno conoscere delle ammirabili proprietà. S' ella vorrà prendersi il pensiero di riscontrare quello, che le asserisco dovrà meco convenire, che poche curve algebraiche vanno del pari con questa. Per mio avviso sarebbe un' opuscolo veramente interessante quello, in cui se ne raccogliessero tutte le proprietà sin' ora conosciute. Un' illustre Giovane, il quale nei suoi esercizj matema-

tici

rici si era fatto un' occupazione di sciogliere molti nuovi problemi ad essa relativi, e di esporre sotto un diverso aspetto li già dimostrati, ne aveva formato il progetto. Forse averrà che in seguito egli lo colori.

Io la prego ornatissimo Sig. letto che avrà questa mia lettera, di farmi conoscere ciò, che ne giudica. Intanto ch' io sto in attenzione di questo segnalato favore accetti ella le assicurazioni della mia vera stima.

Treviso li 4. Aprile 1807.

Suo affezionatissimo Amico
Ab. Jacopo Bonfadini.

99 943697